Recuperación Segundo Parcial
9 de Enero de 2020

ÁLGEBRA LINEAL **Tiempo 2h.**

APELLIDOS:		P1	P2	P3	P4	TOTAL
NOMBRE:						

1. Dado el subespacio vectorial

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}.$$

(a) (**1 puntos**) Obtener una base ortogonal de S.

(b) (**0.5 puntos**) Obtener una base ortonormal del subespacio $S^\perp$, complemento ortogonal de S.

(c) (**1 punto**) Calcular la proyección ortogonal del vector $u = (1, -1, 3)$ sobre los subespacios S y $S^\perp$.

(d) (**1 punto**) Calcular la distancia entre el vector $v = (1, 3, -4)$ y $S^\perp$ y determinar el ángulo que forman.

SOLUCIÓN.

(a) Se trata de un plano de dimension dos , una base del mismo es $B = \left\{\vec{w}_{1,} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ GRAM-SCHMIDT $\vec{o}_1 = \vec{w}_{1,}, \vec{o}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_2, \vec{o}_1 \rangle}{\|\vec{o}_1\|^2} \vec{o}_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\vec{o}_1\|^2 = 2, \|\vec{o}_2\|^2 = 3$$

y, dividiendo cada vector por su norma, tenemos la base ortonormal

$$B^{ORTN} = \left\{\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(b) Cualquier vector del complemento ortogonal ha de ser ortogonal a los dos vectores de la base del subespacio-recta, así se obtienen las ecs. Imp. Del mismo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Una base del mismo es $B^{ORTN}(S^\perp) = \left\{1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

(c) Calculamos los productos escalares y normas que intervienen en la fórmula de la proyección: $\langle \vec{u}, \vec{n}_1 \rangle = 2/\sqrt{2}, \langle \vec{u}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}},= ,. \|\vec{n}_1\|^2 = \|\vec{n}_2\|^2 = 1,$

$$\vec{p}_S(\vec{u}) = 2/\sqrt{2}\, \vec{n}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}} \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(d) $\vec{p}_{S^\perp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 12/\sqrt{6}\; 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ D$(\vec{v}, S^\perp) = d(\vec{v}, \vec{p}_{S^\perp}(\vec{v})) = \sqrt{2}$.

Recuperación Segundo Parcial 9 de Enero de 2020	ÁLGEBRA LINEAL	Tiempo 2h.

APELLIDOS:		P1	P2	P3	P4	TOTAL
NOMBRE:						

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz con respecto a las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(a) (**0.5 puntos**) Demostrar que f es ortogonalmente diagonalizable.

(b) (**1 puntos**) Calcular los autovalores de f indicando sus multiplicidades algebraicas.

(c) (**1 punto**) Definir autovector de f asociado a un autovalor. Determinar si el vector $v = (1, -1, 1)$ es un autovector de f y, en caso afirmativo, indicar a que autovalor está asociado.

(d) (**1 punto**) Encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz de f es diagonal. Escribir la matriz de f respecto de esta base.

SOLUCIÓN.

Al tratarse de una matriz simétrica, admite diagonalización ortogonal. EL POLINOMIO Característico lo calculamos teniendo en cuenta que : det(A)=-5, tr(A)=-3, SDP=-9. Por lo que $P_3(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 = -(\lambda+5)(\lambda-1)^2$. Con lo cual

$$\sigma(A) = \begin{Bmatrix} -5 & 1 \\ m(-5) = 1 & m(1) = 2 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = -5,\ Ker(A+5I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}\right\}.$$

Entonces una base de este subespacio –recta será:

$$B(Ker(A+I)) = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Y una base ortonormal es

$$B^{ON}(Ker(A+I)) = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda = 1,\ Ker(A-I) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + y - z = 0\right\}$$

Entonces una base de este subespacio –plano será:

$$B(Ker(A-I)) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Aplicamos G-S para obtener la base ortonormal

$$B^{ON}(Ker(A-2I)) = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

El vector dado $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $2x + y - z = 0$ y por lo tanto es un autovector de la matriz asociado al autovalor $\lambda = 1$. ($\vec{v} \neq 0$ es autovector de A asociado a λ si verifica la ecuación $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

APELLIDOS:		P1	P2	P3	P4	TOTAL
NOMBRE:						

La Base de diagonalización= $B_{diag} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$

Matriz de Paso de diagonalización=P=$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$

Matriz diagonal $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. (a) Estudiar si pueden existir o no las siguientes aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y determinar su matriz respecto a las base canónica en caso afirmativo:

(i) (**0.5 puntos**) Un giro centrado en el origen que lleve el punto $(1, 1)$ en el $(2, 1)$.

(ii) (**1 puntos**) Una simetría respecto de una recta que pasa por el origen que lleva el punto $(3, 4)$ en el $(0, 5)$.

(b) Se considera en $\mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $x - y = 0$ y la transformación ortogonal *simetría con respecto a dicho plano* S_π. Se pide:

(i) (**0.5 puntos**) Calcular una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $B^{ON} = \{\vec{n}_1, \ \vec{n}_2, \ \vec{n}_3\}$ para la cual sea $M(S_\pi, B^{ON}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) (**1 punto**) Calcular la matriz de la simetría con respecto a la base canónica, $M(S_\pi, B_3^C)$.

SOLUCIÓN:

(a) El giro no es posible pues los vectores dados tienen distinta norma. La simetría sí es posible y sería con respecto a la recta que pasa por el origen y el punto $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$, es decir la recta $y = 3x$. La matriz de dicha simetría es $M(S_{y=3x}, B^C{}_2) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8 & 6\\6 & 8\end{pmatrix}$

(b) Como primer vector de la base cogemos el normal al plano normalizado, es decir $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ y su imagen vale $S_\pi(\vec{n}_1) = -\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}_{B^{ON}}$ Los otros dos vectores serían dos vectores perpendiculares situados en el plano y de norma uno, por ejemplo

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

y su imagen vale $S_\pi(\vec{n}_2) = \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{B^{ON}}$, $S_\pi(\vec{n}_3) = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B^{ON}}$, con lo que

$$M(S_\pi, B^{ON}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para la orientación, calculamos el determinante $Det\big(col(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)\big) = +1$ y deducimos que la base $B^{ON} = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tiene orientación positiva.

$$M(S_\pi, B^C{}_3) = C(B^{ON}, B^C{}_3) M(S_\pi, B^{ON}) C(B^C{}_3, B^{ON}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$